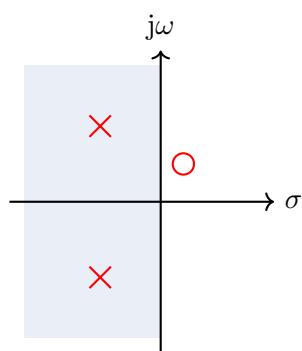


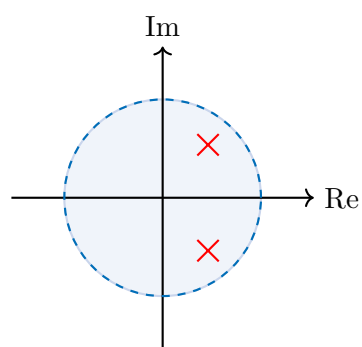
Jelek és Rendszerek

Transzformációk és konvolúció

Összefoglaló segédlet



Laplace (s -sík)



z-transzf. (z -sík)

Tartalom: Konvolúció • Fourier-transzformáció
Laplace-transzformáció • z-transzformáció

Jelek és Rendszerek gyakorlat

Miskolci Egyetem

February 13, 2026

Contents

1	Konvolúció	2
1.1	Az alapgondolat	2
1.2	Folytonos konvolúció	2
1.3	Diszkrét konvolúció	2
1.4	Grafikus módszer: „tükrözd és csúsztasd”	3
1.5	A konvolúció tulajdonságai	3
1.6	Konvolúció a frekvenciatartományban	3
2	Fourier-transzformáció	4
2.1	A Fourier-sor – periodikus jelek	4
2.2	A Fourier-transzformáció definíciója	4
2.3	A spektrum értelmezése	5
2.4	Fourier-transzformációs párok	5
2.5	Műveleti szabályok	5
2.6	A bizonytalansági elv	6
2.7	Szűrés mint spektrum-szorzás	6
2.8	Az FFT – gyakorlati számítás	6
3	Laplace-transzformáció	7
3.1	Motiváció	7
3.2	Definíció	7
3.3	Kapcsolat a Fourier-transzformációval	7
3.4	Az s komplex sík	8
3.5	Példa – kiszámítás	8
3.6	Laplace-transzformációs párok	8
3.7	Műveleti szabályok	9
3.8	Az átviteli függvény	9
3.9	A pólusok jelentése	9
3.10	Inverz Laplace – résztörtekre bontás	9
3.11	A workflow	10
4	z-transzformáció	11
4.1	Motiváció	11
4.2	Definíció	11
4.3	Kapcsolat a Laplace-szal	11
4.4	Példa – kiszámítás	11
4.5	A z^{-1} mint késleltetés	11
4.6	z-transzformációs párok	12
4.7	Műveleti szabályok	12
4.8	Stabilitás és az egységkör	13
4.9	Inverz z-transzformáció – résztörtekre bontás	13
4.10	Frekvenciaválasz – az egységkör mentén	13
5	Összefoglaló összehasonlítás	14
5.1	A négy transzformáció családja	14
5.2	Párhuzam: Laplace vs. z-transzformáció	14
5.3	A konvolúciós tétel mindenhol	14
5.4	A stabilitás egységes áttekintése	15

1. Konvolúció

A konvolúció az LTI (lineáris, időinvariáns) rendszerek központi művelete. Ha ismerjük a rendszer impulzusválasztát $w(t)$, akkor **tetszőleges bemenetre** megadja a kimenetet.

1.1 Az alapgondolat

Bármely bemeneti jel felbontható elemi impulzusok (δ) súlyozott és eltolt összegére. Mindegyik impulzus kiváltja a maga impulzusválasztát (eltolva és skálázva), és mivel a rendszer lineáris, az egyes válaszok összeadódnak. Ez az összeg maga a konvolúció.

1.2 Folytonos konvolúció

Konvolúciós integrál

$$y(t) = (s * w)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

Ha mindkét jel belépőjel ($s(t) = 0$ és $w(t) = 0$ ha $t < 0$):

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) \cdot w(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

A képlet olvasata: A τ pillanatban érkező $s(\tau)$ bemenet kiváltja a rendszer impulzusválasztát, ami $(t - \tau)$ idő elteltével $w(t - \tau)$ értékű. Az integrál összegzi az összes korábbi bemenet hatását.

Konvolúció kiszámítása

Legyen $s(t) = \varepsilon(t)$ (egységugrás) és $w(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$:

$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \cdot \frac{e^{2t} - 1}{2} = \frac{1 - e^{-2t}}{2} \quad (3)$$

Az eredmény a jól ismert elsőrendű rendszer ugrásválasza.

1.3 Diszkrét konvolúció

Konvolúciós összeg

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] \cdot w[k - i] \quad (4)$$

Az eredmény hossza véges sorozatoknál: $N_y = N_s + N_w - 1$.

Lépésről lépésre

$s = [1, 2, 3, 2, 1]$, $w = [1, 1, 1]$ (mozgóátlag):

$$k = 0: \quad y[0] = s[0] \cdot w[0] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$k = 1: \quad y[1] = s[0] \cdot w[1] + s[1] \cdot w[0] = 1 + 2 = 3$$

$$k = 2: \quad y[2] = s[0] \cdot w[2] + s[1] \cdot w[1] + s[2] \cdot w[0] = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$k = 3: \quad y[3] = s[1] \cdot w[2] + s[2] \cdot w[1] + s[3] \cdot w[0] = 2 + 3 + 2 = 7$$

Teljes eredmény: $y = [1, 3, 6, 7, 6, 3, 1]$

1.4 Grafikus módszer: „tükrözd és csúsztasd”

A konvolúció geometriai szemléltetése:

1. **Tükrözd** az impulzusválaszt: $w(\tau) \rightarrow w(-\tau)$
2. **Csúsztasd** jobbra t értékkel: $w(-\tau) \rightarrow w(t - \tau)$
3. **Szorozd** össze $s(\tau)$ -val, és **integrálj** (vagy összegezz)

Minden t pillanathoz a szorzat alatti terület adja $y(t)$ értékét.

1.5 A konvolúció tulajdonságai

Műveleti tulajdonságok

$$\begin{aligned}
 s * w &= w * s & (\text{kommutativitás}) & (5) \\
 (s * w_1) * w_2 &= s * (w_1 * w_2) & (\text{asszociativitás}) & (6) \\
 s * (w_1 + w_2) &= s * w_1 + s * w_2 & (\text{disztributivitás}) & (7) \\
 s(t) * \delta(t) &= s(t) & (\text{egységelem}) & (8)
 \end{aligned}$$

Sorba kapcsolt rendszerek

Ha két LTI rendszert sorba kapcsolunk (w_1 , majd w_2), az eredő impulzusválasz: $w_{\text{eredő}} = w_1 * w_2$. Az asszociativitás miatt a sorrend felcserélhető.

1.6 Konvolúció a frekvenciatartományban

A konvolúciós tétel a transzformációk legfontosabb alkalmazása:

Konvolúciós tétel

$$\boxed{s(t) * w(t) \longleftrightarrow S(j\omega) \cdot W(j\omega)} \quad (9)$$

Konvolúció az időtartományban = szorzás a frekvenciatartományban.
Ez minden transzformációra érvényes:

$$\mathcal{F}: y(t) = s * w \iff Y(j\omega) = S(j\omega) \cdot W(j\omega) \quad (10)$$

$$\mathcal{L}: y(t) = s * w \iff Y(s) = S(s) \cdot W(s) \quad (11)$$

$$\mathcal{Z}: y[k] = s * w \iff Y(z) = S(z) \cdot W(z) \quad (12)$$

2. Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció megválaszolja a kérdést: **milyen frekvenciákból és milyen arányban áll össze egy jel?**

2.1 A Fourier-sor – periodikus jelek

Bármely T periódusú jel felírható szinuszos összetevők összegeként.

Komplex Fourier-sor

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

ahol a Fourier-együtthatók:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (14)$$

Az $|c_n|$ az **amplitúdóspektrum**, $\arg(c_n)$ a **fázisspektrum**.

Négyszögjel Fourier-sora

A ± 1 amplitúdójú szimmetrikus négyszögjel csak páratlan harmonikusokat tartalmaz:

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t) \quad (15)$$

Minél több harmonikust használunk, annál jobb a közelítés. Az ugrási helyeknél $\sim 9\%$ -os túllövés marad (Gibbs-jelenség).

2.2 A Fourier-transzformáció definíciója

Nem-periodikus jelekre a periódust végtelenre növeljük ($T \rightarrow \infty$), a diszkrét harmonikusok folytonos spektrumba mennek át:

Fourier-transzformáció és inverze

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (17)$$

Az $e^{-j\omega t}$ szorzó értelmezése (Euler-képlet):

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

Az integrál a jelet megszorozza egy ω frekvenciájú szinusszal és koszinusszal, majd összegzi. Ha a jelben van ilyen frekvencia, a szorzat nagy; ha nincs, kioltja magát. Ez lényegében **korrelációs vizsgálat**.

Exponenciálisan lecsengő jel

$x(t) = e^{-at}\varepsilon(t)$, ahol $a > 0$:

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \quad (18)$$

Amplitúdóspektrum: $|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$ Fázisspektrum: $\arg X(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a}$

Az alacsony frekvenciák dominálnak – intuitív, hiszen a lecsengő exponenciális “lassú” jel.

2.3 A spektrum értelmezése

$X(j\omega)$ komplex szám minden ω -ra, két információt hordoz:

- **Amplitúdóspektrum** $|X(j\omega)|$: az adott frekvencia jelenléte (“mennyire erős”)
- **Fázisspektrum** $\arg X(j\omega)$: az adott frekvencia fáziseltolása

2.4 Fourier-transzformációs párok

$x(t)$	$X(j\omega)$	Megjegyzés
$\delta(t)$	1	impulzus: minden frekvencia
1	$2\pi\delta(\omega)$	DC: csak $\omega = 0$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	csillapított exponenciális
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	tiszta frekvencia
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	kétoldali lecsengés
$e^{-t^2/2}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$	Gauss önmagába transz.
$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	egységugrás

2.5 Műveleti szabályok

Művelet	Időtartomány	Fourier-tartomány
Linearitás	$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(j\omega) + b X_2(j\omega)$
Időeltolás	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Frekv.eltolás	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Skálázás	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Deriválás	$x'(t)$	$j\omega \cdot X(j\omega)$
Konvolúció	$x_1 * x_2$	$X_1 \cdot X_2$
Szorzás	$x_1 \cdot x_2$	$\frac{1}{2\pi} X_1 * X_2$
Parseval	$\int x ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int X ^2 d\omega$

2.6 A bizonytalansági elv

A skálázási szabályból következik: ha a jel **rövid** az időben, a spektruma **széles**; ha **hosszú**, a spektruma **keskeny**.

Heisenberg-féle bizonytalansági reláció

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (19)$$

Nem lehet egyszerre pontosan lokalizálni egy jelet időben és frekvenciában. Az egyenlőséget a Gauss-impulzus éri el.

2.7 Szűrés mint spektrum-szorzás

Ha $x(t)$ átmegy egy $H(j\omega)$ átvitelű szűrőn:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) \quad (20)$$

A szűrő **frekvenciánként szorozza** a spektrumot. Aluláteresztő szűrő: $|H| \approx 1$ alacsonyan, $|H| \approx 0$ magasan $\Rightarrow$ a magas frekvenciájú zaj kiesik.

2.8 Az FFT – gyakorlati számítás

A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) N mintára:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot e^{-j2\pi nk/N} \quad (21)$$

Az FFT (Fast Fourier Transform) ugyanezt számítja $O(N \log N)$ művelettel (szemben a DFT $O(N^2)$ -ével). A `numpy.fft.fft()` ezt implementálja.

Spektrumszivárgás

Az FFT feltételezi, hogy a jel periodikusan ismétlődik. Ha a jelszakasz nem teljes periódust tartalmaz, mesterséges frekvenciák jelennek meg (spectral leakage). Ablakfüggvényekkel (Hamming, Hanning) csökkenthető.

3. Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció az időtartományban nehéz feladatokat (differenciálegyenletek, konvolúció) olyan tartományba viszi, ahol **egyszerű algebrai műveletekké** válnak.

3.1 Motiváció

Vegyük a differenciálegyenletet: $y'' + 3y' + 2y = s(t)$.

Laplace-transzformálva a deriválás szorzássá alakul:

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2 Y(s) = S(s) \quad (22)$$

$$Y(s) = \frac{S(s)}{s^2 + 3s + 2} = S(s) \cdot H(s) \quad (23)$$

Konvolúció $\rightarrow$ **szorzás**, differenciálegyenlet $\rightarrow$ polinom-egyenlet.

3.2 Definíció

Laplace-transzformáció (egyoldali)

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t) \cdot e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega \quad (24)$$

Az e^{-st} **szorzó** két dolgot csinál egyszerre:

$$e^{-st} = \underbrace{e^{-\sigma t}}_{\text{csillapító ablak}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\text{frekvencia-kérdezés}}$$

Az $e^{-\sigma t}$ biztosítja, hogy az integrál véges legyen (növekvő jelekre is). Az $e^{-j\omega t}$ a frekvenciatartalmat vizsgálja.

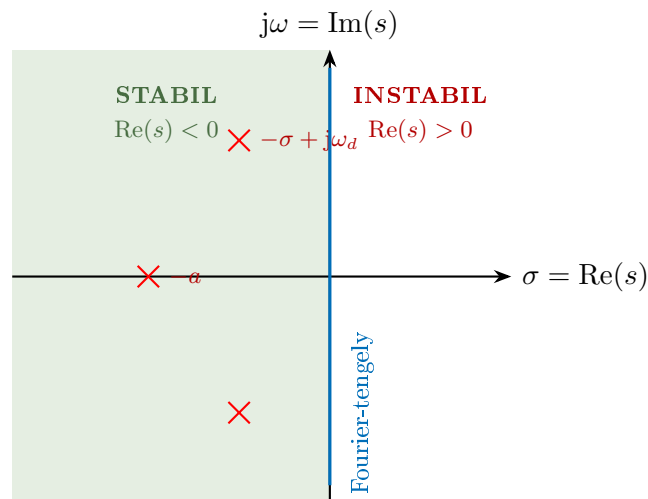
3.3 Kapcsolat a Fourier-transzformációval

Fourier mint speciális eset

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (25)$$

A Fourier-transzformáció a Laplace speciális esete $\sigma = 0$ -val. A Laplace általánosabb, mert a σ dimenzió miatt instabil jelekre is működik.

3.4 Az s komplex sík



- **Vízszintes tengely** (σ): csillapítás/növekedés mértéke
- **Függőleges tengely** ($j\omega$): frekvencia
- A Bode-diagram $H(s)$ -t a **képzetes tengelyen** ábrázolja

3.5 Példa – kiszámítás

$x(t) = e^{-at}\varepsilon(t)$ Laplace-transzformáltja

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+a} \quad (26)$$

A pólus $s = -a$: közvetlenül kódolja a csillapítási állandót.

3.6 Laplace-transzformációs párok

$x(t)$	$X(s)$	Pólus(ok)
$\delta(t)$	1	–
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$s = 0$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$s = -a$
$t e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kettős pólus
$t^n \varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(n+1)$ -szeres
$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$s = \pm j\omega_0$
$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$s = \pm j\omega_0$
$e^{-at} \sin(\omega t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$s = -a \pm j\omega$
$e^{-at} \cos(\omega t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$s = -a \pm j\omega$

3.7 Műveleti szabályok

Művelet	Időtartomány	Laplace-tartomány
Deriválás	$x'(t)$	$sX(s) - x(0^-)$
2. derivált	$x''(t)$	$s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$
Integrálás	$\int_0^t x \, d\tau$	$X(s)/s$
Időeltolás	$x(t - \tau)\varepsilon(t - \tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$
Frekv.eltolás	$e^{-at}x(t)$	$X(s + a)$
Konvolúció	$x_1 * x_2$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$
Kezdőérték	$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
Végérték	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

3.8 Az átviteli függvény

Ha az LTI rendszer impulzusválasza $w(t)$:

$$H(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} = \frac{Y(s)}{S(s)} \quad (27)$$

Ez egyetlen törtfüggvénybe sűríti a rendszer viselkedését.

Másodrendű rendszer

$$H(s) = \frac{A\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (28)$$

Leolvasható: ω_0 – sajátfrekvencia, ζ – csillapítási tényező, A – erősítés.

Pólusok: $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$. Ha $0 < \zeta < 1$: komplex konjugált pár $\Rightarrow$ csillapodó rezgés.

3.9 A pólusok jelentése

Pólus típusa	Időviselkedés	Jelleg
Valós, negatív: $s = -a$	e^{-at} lecsengés	stabil
Komplex: $-\sigma \pm j\omega$	$e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$	csill. rezgés
Tiszta képzetes: $\pm j\omega_0$	$\cos(\omega_0 t)$	tartós rezgés
Valós, pozitív: $s = +a$	e^{+at} növekedés	instabil

Stabilitási feltétel

Az LTI rendszer aszimptotikusan stabil $\iff$ minden pólus a bal félsíkban van:

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad \forall i \quad (29)$$

3.10 Inverz Laplace – rész törtrekre bontás

A rész törtrekre bontás a kulcs: minden törtfüggvényt egyszerű tagok összegére bontunk.

Résztörtek és visszatranszformáció

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{s+3} \quad (30)$$

Reziduumok: $r_1 = \frac{s+1}{s+3} \Big|_{s=-2} = \frac{-1}{1} = -1$, $r_2 = \frac{s+1}{s+2} \Big|_{s=-3} = \frac{-2}{-1} = 2$.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = -e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad t \geq 0 \quad (31)$$

Minden résztört visszatranszformálható: $\frac{r}{s-p} \leftrightarrow r \cdot e^{pt}$.

3.11 A workflow

1. Felírod a differenciálegyenletet
2. Laplace-transzformálsz: deriválás $\rightarrow s$ -szel szorzás
3. Kifejezed $H(s)$ -t $\rightarrow$ egyszerű törtfüggvény
4. Elemzel: pólusok $\rightarrow$ stabilitás, Bode $\rightarrow$ frekvenciaválasz
5. Résztörtekre bontod és visszatranszformálsz $\rightarrow y(t)$

4. z-transzformáció

A z-transzformáció a Laplace-transzformáció **diszkrét idejű párja**. Amit a Laplace tesz a folytonos rendszerekkel, azt a z-transzformáció végzi a digitális rendszerekkel.

4.1 Motiváció

A digitális világban nincsenek folytonos jelek – csak számsorozatok $(x[0], x[1], x[2], \dots)$, amiket órajel ütemére dolgozunk fel. A Laplace-transzformáció integrálja $(\int_0^\infty)$ nem értelmezett számsorozatokra, ezért kell egy diszkrét változat: **összegzés integrálás helyett**.

4.2 Definíció

z-transzformáció (egyoldali)

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad (32)$$

Ez egy hatványsor z^{-1} -ben. A z^{-1} jelentése: **egy lépés késleltetés**.

4.3 Kapcsolat a Laplace-szal

Ha folytonos jelet T_s időközönként mintavételezünk:

$$z = e^{sT_s} \quad (33)$$

A Laplace-tartomány képzetes tengelye $(s = j\omega)$ a z-síkon az **egységkörre** képeződik. A bal félsík az egységkör **belsejébe** kerül.

4.4 Példa – kiszámítás

$x[k] = a^k \varepsilon[k]$ z-transzformáltja

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (34)$$

Az utolsó lépés a mértani sor összegképlete $(|a/z| < 1)$. A pólus $z = a$: közvetlenül kódolja a sorozat alapját.

4.5 A z^{-1} mint késleltetés

A Laplace-nál deriválás $\rightarrow s$ -szorzás. A z-transzformációnál **késleltetés** $\rightarrow z^{-1}$ -szorzás:

$$x[k - 1] \longleftrightarrow z^{-1} \cdot X(z) \quad (35)$$

Differencia-egyenlet $\rightarrow$ átviteli függvény

$y[k] = 0,5 \cdot y[k-1] + s[k]$ z -transzformálva:

$$Y(z) = 0,5 \cdot z^{-1} Y(z) + S(z) \quad (36)$$

$$Y(z) (1 - 0,5 z^{-1}) = S(z) \quad (37)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1}} = \frac{z}{z - 0,5} \quad (38)$$

A pólus $z = 0,5$ megmondja: a rendszer impulzusválasza $w[k] = 0,5^k$.

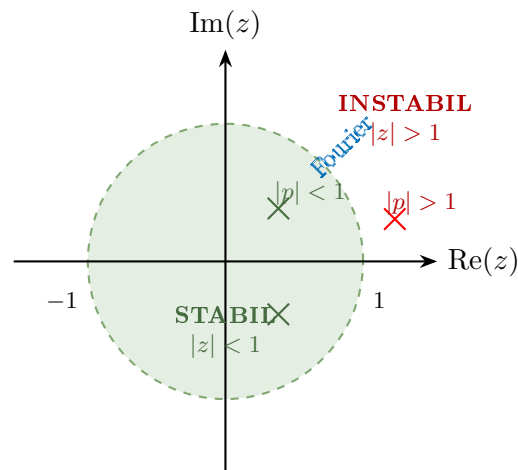
4.6 z -transzformációs párok

$x[k]$	$X(z)$	Pólus
$\delta[k]$	1	–
$\varepsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$	$z = 1$
$a^k \varepsilon[k]$	$\frac{z}{z-a}$	$z = a$
$k a^k \varepsilon[k]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	kettős
$k \varepsilon[k]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	kettős $z = 1$
$\cos(\Omega k) \varepsilon[k]$	$\frac{z^2 - z \cos \Omega}{z^2 - 2z \cos \Omega + 1}$	$z = e^{\pm j\Omega}$
$a^k \cos(\Omega k) \varepsilon[k]$	$\frac{z^2 - az \cos \Omega}{z^2 - 2az \cos \Omega + a^2}$	$z = ae^{\pm j\Omega}$

4.7 Műveleti szabályok

Művelet	Időtartomány	z -tartomány
Késleltetés	$x[k-1]$	$z^{-1} X(z)$
Előrehozás	$x[k+1]$	$z X(z) - z x[0]$
Konvolúció	$x_1 * x_2$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
Frekvenciatartomány	$a^k x[k]$	$X(z/a)$
Akkumulátor	$\sum_{i=0}^k x[i]$	$\frac{z}{z-1} X(z)$
Kezdőérték	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Végérték	$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$

4.8 Stabilitás és az egységkör



Egy $z = p$ pólusú rendszer impulzusválasza p^k :

- $|p| < 1$: hatványok csökkennek $\rightarrow$ **stabil**
- $|p| = 1$: állandó amplitúdó $\rightarrow$ határeset
- $|p| > 1$: hatványok nőnek $\rightarrow$ **instabil**

Stabilitási feltétel

A diszkrét LTI rendszer aszimptotikusan stabil $\iff$ minden pólus az egységkörön belül:

$$|z_i| < 1, \quad \forall i \quad (39)$$

4.9 Inverz z-transzformáció – résztörtekre bontás

Résztörtek

$$H(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z - 0,8)} = \frac{r_1}{1 - 0,5z^{-1}} + \frac{r_2}{1 - 0,8z^{-1}} \quad (40)$$

Visszatranszformálva: $w[k] = r_1 \cdot 0,5^k + r_2 \cdot 0,8^k$

Minden résztört: $\frac{r}{1 - pz^{-1}} \leftrightarrow r \cdot p^k \varepsilon[k]$

4.10 Frekvenciaválasz – az egységkör mentén

$H(z)$ -t az egységkörön ($z = e^{j\Omega}$) kiértékelve kapjuk a frekvenciaválaszt:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\sum b_i e^{-j\Omega i}}{\sum a_i e^{-j\Omega i}}, \quad \Omega = \omega T_s \in [0, \pi] \quad (41)$$

A `scipy.signal.freqz()` ezt számítja. Az egységkör felső fele a $[0, f_s/2]$ frekvenciatartományt fedi le.

5. Összefoglaló összehasonlítás

5.1 A négy transzformáció családja

	Periodikus jel	Nem-periodikus jel
Folytonos idő	Fourier-sor (diszkrét spektrum)	Fourier-transzformáció (folytonos spektrum)
Diszkrét idő	DFT/FFT (diszkrét spektrum)	DTFT (folytonos spektrum)

A Laplace és a z-transzformáció ezek **általánosításai** a komplex síkra kiterjesztve.

5.2 Párhuzam: Laplace vs. z-transzformáció

	Laplace	z-transzformáció
Tartomány	folytonos, t	diszkrét, k
Definíció	$\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$	$\sum_{k=0}^\infty x[k]z^{-k}$
Változó	$s = \sigma + j\omega$	$z = re^{j\theta}$
Késleltetés	e^{-sT} szorzó	z^{-1} szorzó
Deriválás/diff.	$s \cdot X(s)$	$(1 - z^{-1})X(z)$
Stabilitási határ	képzetes tengely	egységkör
Stabil, ha:	$\text{Re}(s_i) < 0$	$ z_i < 1$
Fourier speciális eset:	$s = j\omega$	$z = e^{j\Omega}$
Átviteli fgv.	$H(s) = Y(s)/S(s)$	$H(z) = Y(z)/S(z)$
Bode-diagram	$ H(j\omega) $ [dB]	$ H(e^{j\Omega}) $ [dB]
Inverz módszer	résztörtekre bontás	résztörtekre bontás

5.3 A konvolúciós tétel mindenhol

A konvolúció és a transzformációk egységes képe

	Időtartomány	Frekvenciatartomány
Fourier:	$y(t) = s(t) * w(t) \longleftrightarrow$	$Y(j\omega) = S(j\omega) \cdot W(j\omega)$
Laplace:	$y(t) = s(t) * w(t) \longleftrightarrow$	$Y(s) = S(s) \cdot H(s)$
z-transz.:	$y[k] = s[k] * w[k] \longleftrightarrow$	$Y(z) = S(z) \cdot H(z)$

Konvolúció az időtartományban = szorzás a transzformált tartományban.

Ez az egyetlen tétel összeköti mind a négy témakört, és ez az LTI rendszerelmélet alapja.

5.4 A stabilitás egységes áttekintése

Rendszer	Feltétel	Idő	Transzf.
Folytonos BIBO	$\int_0^\infty w(t) dt < \infty$	$w(t) \rightarrow 0$	$\operatorname{Re}(s_i) < 0$
Diszkrét BIBO	$\sum_{k=0}^\infty w[k] < \infty$	$w[k] \rightarrow 0$	$ z_i < 1$

Kapcsolódó Python eszközök

Művelet	Python függvény
FFT	<code>numpy.fft.fft()</code>
Laplace résztörtek	<code>scipy.signal.residue()</code>
z-transzf. résztörtek	<code>scipy.signal.residuez()</code>
Pólus-zérus	<code>scipy.signal.tf2zpk()</code>
Bode-diagram	<code>scipy.signal.bode()</code>
Ugrás/impulzusválasz	<code>scipy.signal.step()</code> , <code>impulse()</code>
Diszkrét frekvenciaválasz	<code>scipy.signal.freqz()</code>
FIR szűrő tervezés	<code>scipy.signal.firwin()</code>
Folytonos $\rightarrow$ diszkrét	<code>scipy.signal.cont2discrete()</code>